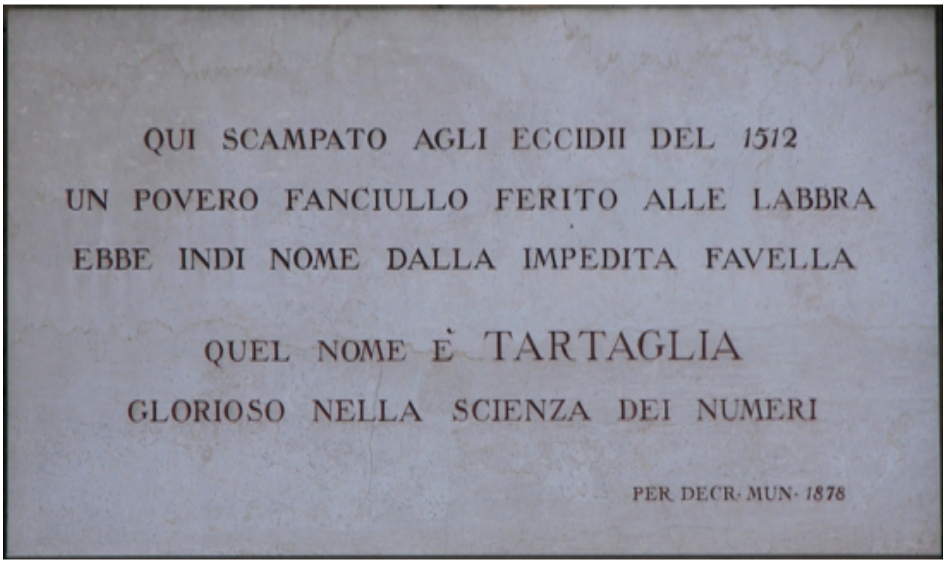
ANNO SCOLASTICO 2015/2016

SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO
"U. FOSCOLO"

RELAZIONE DI MATEMATICA

IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA



ALUNNO: NICOLÒ BAGNASCO
CLASSE: 3°B
PROFESSORE: DANIELE BALDISSIN

CENNI STORICI

Tartaglia è il soprannome di Niccolò Fontana; nacque a Brescia nel 1499 e morì a Venezia nel 1557.

Durante il saccheggio di Brescia da parte dei francesi nel 1512 rimase ferito al volto e al palato e gli rimase un forte difetto di pronuncia, da cui il suo soprannome "Tartaglia".

Insegnò a Verona, Mantova e a Venezia.

E' ricordato in particolare per due sue intuizioni: il triangolo, che porta anche il suo nome, e che permette di determinare i coefficienti binomiali per sviluppare la potenza di un binomio e la risoluzione dell'equazione di terzo grado: $x^3 + px + q$.

A lui si deve la prima traduzione in lingua volgare degli Elementi di Euclide.

Nel 1546 scrisse "*Quesiti et invenzioni diverse*", dove risolve problemi di balistica meccanica, fabbricazioni di esplosivi ma l'argomento principale rimane l'algebra e nel 1560, in "*General trattato di numeri et misure*" parla per la prima volta del famoso triangolo.

Blaise Pascal, nel 1654, scrisse un intero libro, "*Le Triangle Aritmétique*", dedicato al triangolo di Tartaglia e alle sue proprietà, in particolare nel campo del calcolo combinatorio. Questo studio fu tanto importante che portò, in seguito, a ribattezzare il triangolo di Tartaglia con il nome di "triangolo di Pascal".

Più giustamente, però, si dovrebbe parlare di "triangolo cinese"; in un libro cinese del 1303 intitolato "Prezioso Specchio dei Quattro Elementi", scritto dal matematico cinese Zhu Shijie, tale triangolo appare con il nome di "Tavola del Vecchio Metodo dei Sette Quadrati Moltiplicatori ".

In realtà questo triangolo ha incuriosito matematici di tutto il mondo perché è pieno di misteri e di tesori… vediamo quindi qualche sua applicazione.

Fig. 1. Tavola del vecchio metodo dei sette quadrati moltiplicatori

COME SI CREA IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA?

Il triangolo di Tartaglia è costituito da numeri naturali disposti in forma triangolare; al vertice, in alto, si trova il numero 1; allo stesso modo si dispongono i numeri 1 lungo i due lati obliqui e, all'interno del triangolo, ogni numero è ottenuto dalla somma dei due numeri della riga precedente che stanno sopra esso.

Di conseguenza il triangolo non ha fine.

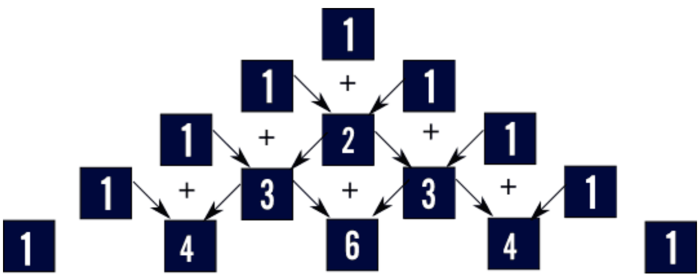


Fig. 2. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Si ottiene quindi il seguente triangolo numerico:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

Fig. 3. Triangolo di Tartaglia

APPLICAZIONI DEL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

QUADRATO DI BINOMIO

La principale applicazione del triangolo di Tartaglia è lo sviluppo delle potenze di un binomio. Infatti, ciascuna "riga n" (partendo da n = 0) del triangolo contiene i coefficienti del polinomio sviluppo della potenza di un binomio con esponente n.

Per esempio:

riga 0	$(x + y)^0$	1	1
riga 1	$(x + y)^1$	1 1	$1\,x^1 + 1\,y^1$
riga 2	$(x + y)^2$	1 2 1	$1\,x^2 + 2\,x^1y^1 + 1\,y^2$
riga 3	$(x + y)^3$	1 3 3 1	$1\,x^3 + 3\,x^2y^1 + 3\,x^1y^2 + 1\,y^3$
riga 4	$(x + y)^4$	1 4 6 4 1	$1\,x^4 + 4\,x^3y^1 + 6\,x^2y^2 + 4\,x^1y^3 + 1\,y^4$
riga 5	$(x + y)^5$	1 5 10 10 5 1	$1\,x^5 + 5\,x^4y^1 + 10\,x^3y^2 + 10\,x^2y^3 + 5\,x^1y^4 + 1\,y^5$
riga 6	…		

Tab. 1. Potenze di un binomio

Come si può notare, ciascun polinomio:
- ha come coefficienti i termini di una riga del triangolo di Tartaglia,
- è omogeneo infatti le potenze delle due incognite in ciascun monomio hanno la somma pari all'esponente della potenza del binomio
- è ordinato in modo crescente rispetto a un'incognita e decrescente rispetto all'altra.

In questo modo sarà possibile sviluppare la potenza di un qualsiasi binomio.

NUMERI DI FIBONACCI

Dal triangolo di Tartaglia si possono ricavare i numeri di Fibonacci, successione di numeri che porta il nome di Leonardo Pisano detto Fibonacci, (ovvero figlio di Guglielmo Bonacci), matematico vissuto a Pisa tra il 1170 e il 1240.

La sua opera più importante è il "*Liber abbaci*", pubblicato nel 1228: essa raccoglie le conoscenze aritmetiche e algebriche del tempo ed ha avuto una funzione fondamentale nello sviluppo della matematica dell'Europa occidentale.

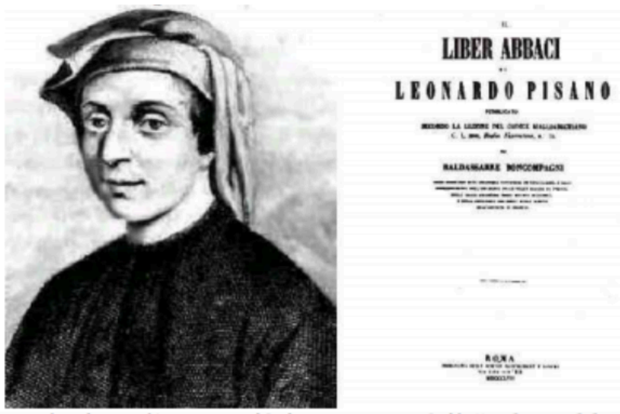


Fig. 4. Fibonacci - *Liber Abbaci*

Per ottenere la serie di numeri di Fibonacci dal triangolo di Tartaglia basta sommare i numeri delle diagonali; dalla prima riga si ottiene 1 , dalla seconda 1, poi 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...,

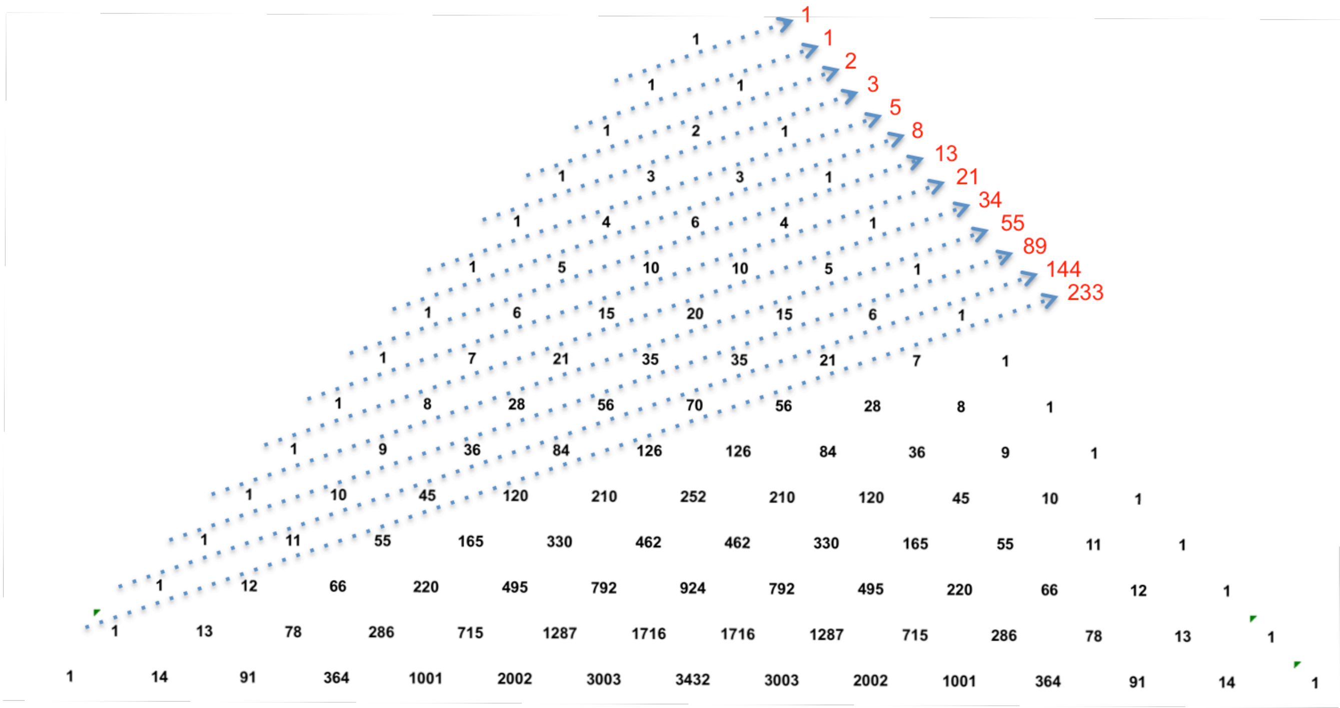


Fig. 5. Numeri di Fibonacci ottenuti dal triangolo di Tartaglia

POTENZE DI 2

Dal triangolo di Tartaglia si possono ottenere tutte le potenze di base 2, sommando i numeri presenti in ciascuna riga n, ma occorre assegnare n = 0 alla prima riga del triangolo di Tartaglia, contenente il numero 1.

Ho costruito questa tabella con Excel, facendo calcolare il valore di ciascun numero del triangolo di Tartaglia come somma della cella posta nella riga superiore con quella precedente ad essa:

Immettere un nome per un gruppo di celle o selezionare un intervallo denominato nell'elenco

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
7	riga 1		1	1						
8	riga 2		1	=C7+D7	1					
9	riga 3		1	=C8+D8	=D8+E8	=E8+F8				
10	riga 4		1	=C9+D9	=D9+E9	=E9+F9	=F9+G9			
11	riga 5		1	=C10+D10	=D10+E10	=E10+F10	=F10+G10	1		
12	riga 6		1	=C11+D11	=D11+E11	=E11+F11	=F11+G11	=G11+H11	1	
13	riga 7		1	=C12+D12	=D12+E12	=E12+F12	=F12+G12	=G12+H12	=H12+I12	1

Tab. 2. Excel - Costruzione del triangolo di Tartaglia

Ho quindi creato questa tabella; sono presenti due colonne uguali ma calcolate in modo diverso: la prima (evidenziata in giallo) come somma della sequenza di numeri del triangolo di Tartaglia corrispondenti alla riga n e la seconda (evidenziata in verde) come potenza di 2 elevato al numero n, corrispondente alla riga scelta.

TRIANGOLO DI TARTAGLIA - POTENZE DI 2

																	SOMMA TERMINI RIGA n		2^n	
riga 0	1																1	→	2^0	1
riga 1	1	1															2	→	2^1	2
riga 2	1	2	1														4	→	2^2	4
riga 3	1	3	3	1													8	→	2^3	8
riga 4	1	4	6	4	1												16	→	2^4	16
riga 5	1	5	10	10	5	1											32	→	2^5	32
riga 6	1	6	15	20	15	6	1										64	→	2^6	64
riga 7	1	7	21	35	35	21	7	1									128	→	2^7	128
riga 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1								256	→	2^8	256
riga 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							512	→	2^9	512
riga 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						1024	→	2^{10}	1024
riga 11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					2048	→	2^{11}	2048
riga 12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1				4096	→	2^{12}	4096
riga 13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			8192	→	2^{13}	8192
riga 14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1		16384	→	2^{14}	16384
riga 15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	32768	→	2^{15}	32768

Tab. 3. Potenze di base 2 con il triangolo di Tartaglia

POTENZE DI 11

Un’altra utilità del triangolo di Tartaglia è legata alle potenze di 11.

I numeri delle prime 5 righe del triangolo di Tartaglia, se considerati come cifre e messi in sequenza, danno i numeri: 1, 11, 121, 1331, 14641.

Essi sono esattamente le prime 5 potenze di 11:

$11^0 = 1$

$11^1 = 11$

$11^2 = 121$

$11^3 = 1331$

$11^4 = 14641$

Questo semplice accostamento dei numeri del triangolo per formare le potenze di 11 sembra non funzionare più dalla riga 6 ma, invece, basta andare a considerare i “riporti” dei numeri maggiori di 9.

TRIANGOLO DI TARTAGLIA - POTENZE DI 11												**11^n**	
riga 0	1											11^0	1
riga 1	1	1										11^1	11
riga 2	1	2	1									11^2	121
riga 3	1	3	3	1								11^3	1331
riga 4	1	4	6	4	1							11^4	14641
riga 5	1	5	10	10	5	1						11^5	161051
riga 6	1	6	15	20	15	6	1					11^6	1771561
riga 7	1	7	21	35	35	21	7	1				11^7	19487171
riga 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			11^8	214358881
riga 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		11^9	2357947691
riga 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	11^{10}	25937424601

Tab. 4. Potenze di base 11 con il triangolo di Tartaglia

COME OTTENERE LE POTENZE DI 11 CON n > 4						
Sequenza di Tartaglia	1	5	10	10	5	1
	1	5	10 + 0	10 + 0	5	1
	1	5 + 1	0 + 1	0	5	1
11^5	1	6	1	0	5	1

Fig. 6. Metodo del riporto per ottenere potenze di 11 con esp. maggiore di 4

Scrivendo quindi i numeri maggiori di 9 come somma di decine e unità e riportando le decine nelle caselle precedenti, si possono comunque ottenere le potenze di 11^n , con n > 4.

I NUMERI TRIANGOLARI

Dal triangolo di Tartaglia si possono ottenere i **numeri triangolari**:

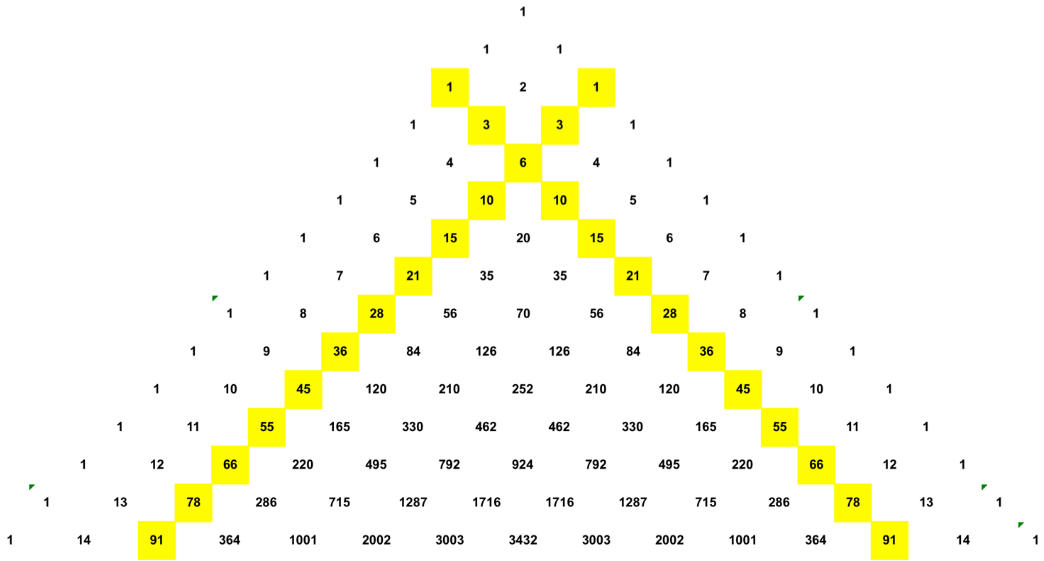


Fig. 7. Numeri triangolari nel triangolo di Tartaglia

I numeri triangolari sono quei numeri che, se associati per esempio a un numero di palline pari al numero stesso, esse si possono disporre a forma di triangolo equilatero o isoscele.

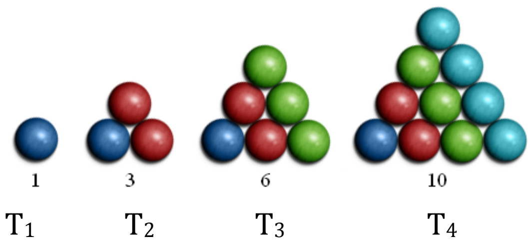


Fig. 8. I numeri triangolari

Come si può vedere dalla figura, ogni numero triangolare Tn è uguale alla somma dei primi n numeri naturali:

T1 = 1
T2 = 1 + 2
T3 = 1 + 2 + 3
T4 = 1 + 2 + 3 + 4
T5 = …

In generale, i numeri triangolari si possono esprimere con una formula, detta formula di Gauss:

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

dove n è il numero di palline che costituiscono la base e Tn sarà pertanto il numero di palline che costituiscono il triangolo, ovvero il numero triangolare.

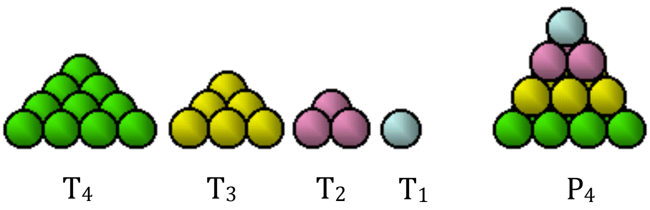


Fig. 9. I numeri tetraedrici

Se ora pensiamo di sovrapporre T4, T3, T2 e T1 otteniamo un tetraedro.

Come si vede dalla figura, P4 = T1 + T2 + T3 + T4.

Il numero P4 è detto numero tetraedrico perché, se associato per esempio a un numero di palline pari al numero stesso, esse si possono disporre a forma di Tetraedro.

Quindi, possiamo dire che:

il numero tetraedrico Pn è dato dalla somma di tutti i primi n numeri triangolari.

Tutto questo si ritrova nel triangolo di Tartaglia.

Se osserviamo la figura qui sotto, proprio per la proprietà con cui si costruiscono le sequenze del triangolo, ogni numero triangolare, sommato ai suoi precedenti, dà come risultato il numero a lui precedente nella riga sottostante.

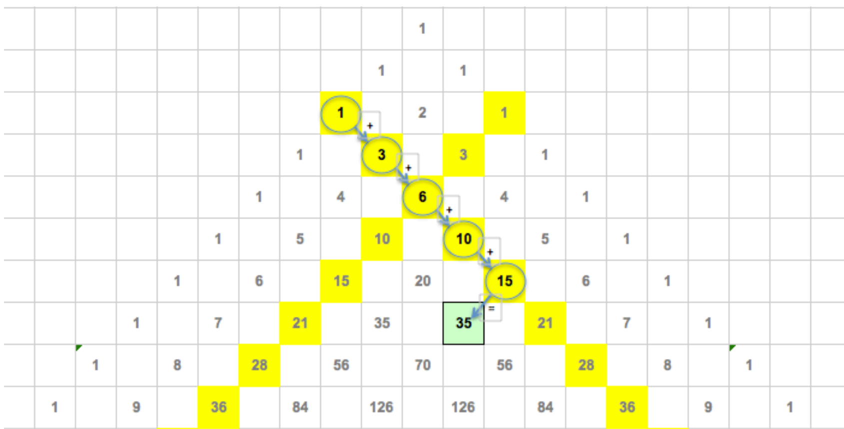


Fig. 10. Legame tra i numeri triangolari e i numeri tetraedrici

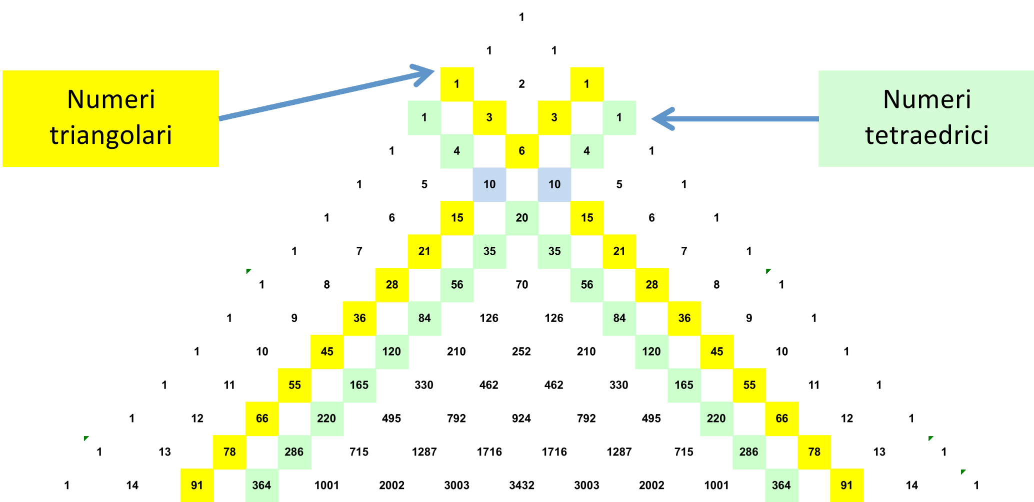


Fig. 11. Sequenze dei numeri triangolari e dei numeri tetraedrici

TARTAGLIA, PATTERN E FRATTALI

Se nel triangolo di Tartaglia si colorano i numeri pari e i numeri dispari con colori diversi, si nota che la loro distribuzione nel triangolo non è casuale: si formano dei triangoli di diverse dimensioni.

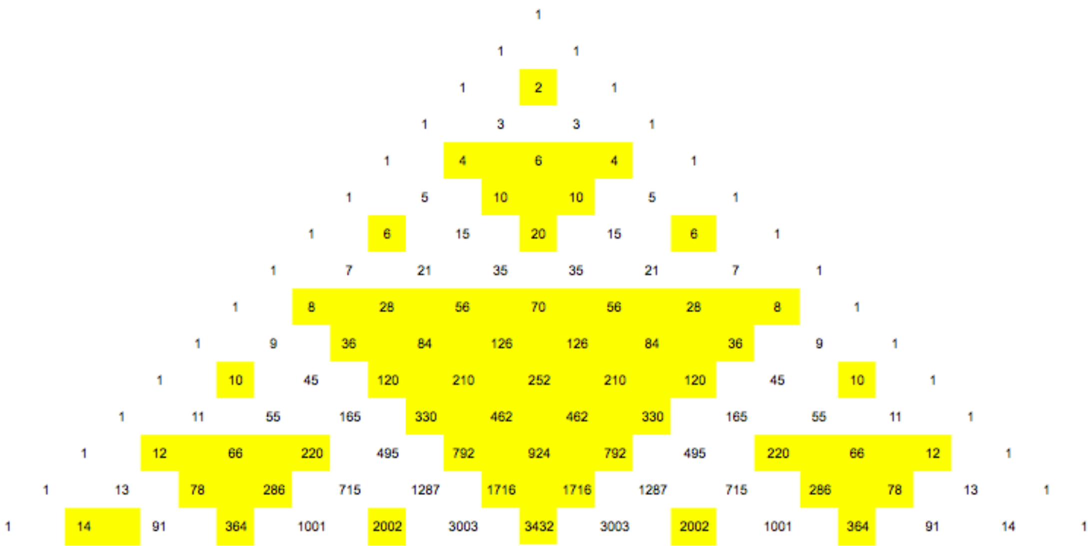


Fig. 12. Triangolo di Tartaglia con numeri pari evidenziati

Se proviamo invece a colorare i numeri dispari e a lasciare bianchi i numeri pari, si vede meglio la regolarità nella loro sistemazione; la forma dei triangoli si ripete, con diverse dimensioni ma sempre con la medesima forma. I triangoli sono tra loro simili.

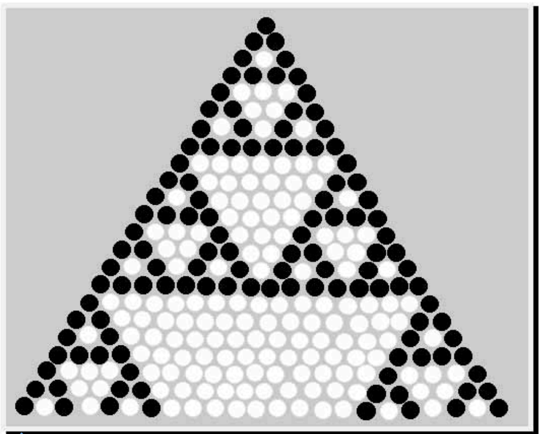


Fig. 13. Triangolo di Tartaglia con numeri dispari evidenziati

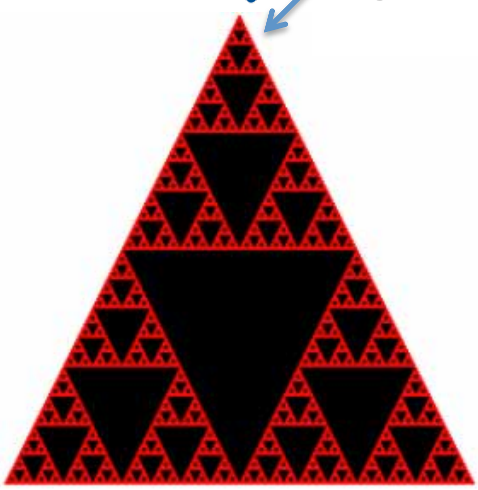


Fig. 14. Triangolo di Tartaglia con numeri pari e dispari di differente colore

Se si prova a considerare un triangolo di Tartaglia molto più ampio, ovvero con un gran numero di righe, si vede molto bene che la distribuzione dei numeri pari e dispari creano un pattern regolare: sembra che sia una struttura frattale, ovvero una struttura che si ripete in scala sempre più piccola.

Anche colorando i numeri del triangolo di Tartaglia multipli di 3, di 4 o di 5, ritroviamo tre diversi pattern, tutti molto simili tra loro e che richiamano quelli visti con la disposizione dei numeri pari/dispari:

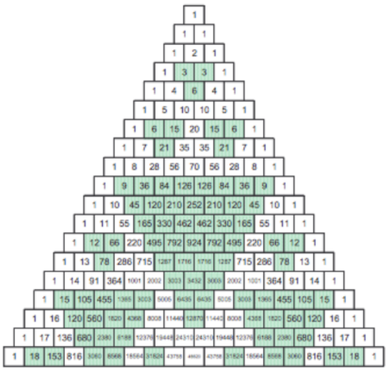


Fig. 15. numeri divisibili per 3

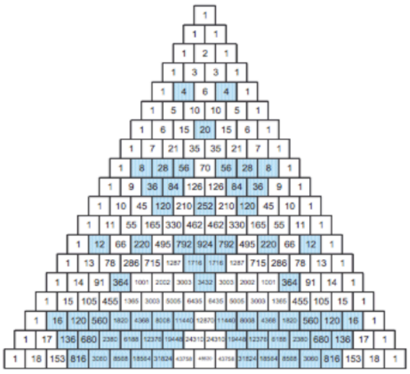


Fig. 16. Numeri divisibili per 4

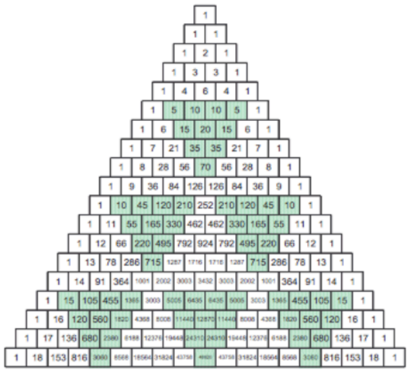


Fig. 17. Numeri divisibili per 5

Questi sono solo alcuni esempi dei molteplici usi del triangolo di Tartaglia, una vera e propria “macchina della matematica”!

Bibliografia
Hans M. Enzensberger, *Il mago dei numeri*, 2005, Einaudi

Sitografia:
http://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/6207-triangolo-di-tartaglia.html

http://www.amolamatematica.it/index.php/storia/item/download/868_162b087c73c1f8c0b05b2ad54ee95e7f

http://matematicamedie.blogspot.it/2009/02/il-triangolo-di-tartaglia.html

https://it.wikipedia.org/wiki/Triangolo_di_Tartaglia

http://www.oilproject.org/lezione/triangolo-tartaglia-formula-di-newton-spiegazione-potenza-binomio-13066.html

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Feb_02/Cap6.html