

## I POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

### PREREQUISITI

- conoscere le proprietà delle quattro operazioni e operare con esse
- conoscere gli enti fondamentali della geometria e le loro proprietà
- conoscere gli elementi e le proprietà dei poligoni
- conoscere la circonferenza, i suoi elementi e le loro proprietà

### CONOSCENZE

1. le proprietà dei poligoni inscritti e circoscritti
2. le proprietà dei quadrilateri inscritti e circoscritti
3. le proprietà dei poligoni regolari

### ABILITÀ

- A. applicare le proprietà dei poligoni inscritti e circoscritti
- B. applicare le proprietà dei poligoni regolari

## PER RICORDARE

### I poligoni inscritti e circoscritti:

1. un poligono **inscritto** in una circonferenza ha tutti i suoi vertici appartenenti alla circonferenza;
2. un poligono **circoscritto** ad una circonferenza ha tutti i suoi lati tangenti alla circonferenza;
3. gli **assi** dei lati di un poligono inscritto si intersecano in uno stesso punto detto **circocentro**;
4. le **bisettrici** degli angoli di un poligono circoscritto si intersecano in uno stesso punto detto **incentro**;
5. un **quadrilatero inscritto** in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari;
6. un **quadrilatero circoscritto** ad una circonferenza ha la somma di due lati opposti congruente alla somma degli altri due.

### I poligoni regolari:

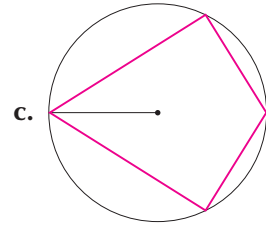
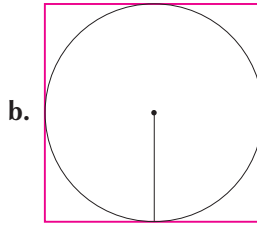
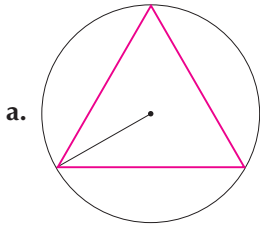
7. un **poligono regolare** ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti;
8. un **poligono regolare** è sempre inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza;
9. per calcolare il **numero dei lati** di un poligono regolare bisogna dividere  $360^\circ$  per l'ampiezza dell'angolo al centro del poligono stesso;
10. In un poligono regolare, per calcolare:
  - a. l'**ampiezza dell'angolo al centro** bisogna dividere  $360^\circ$  per il numero dei lati;
  - b. la **misura di un angolo esterno** bisogna dividere  $360^\circ$  per il numero dei lati;
  - c. il **numero dei lati** conoscendo la misura dell'angolo esterno bisogna dividere  $360^\circ$  per l'ampiezza dell'angolo esterno;
11. il **raggio della circonferenza circoscritta** ad un triangolo equilatero è il doppio del raggio di quella inscritta;
12. l'**apotema di un triangolo equilatero** è un terzo dell'altezza del triangolo stesso;
13. l'**apotema di un quadrato** è la metà del lato;
14. il **lato di un esagono regolare** è congruente al raggio della circonferenza circoscritta.

## ESERCIZI DI CONOSCENZA

**1** Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- Un poligono inscritto in una circonferenza ha tutti i vertici che appartengono alla circonferenza;
- un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se gli assi dei suoi lati si intersecano in uno stesso punto;
- un poligono circoscritto ad una circonferenza ha tutti i lati che appartengono alla circonferenza;
- un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se le bisettrici di tutti gli angoli si intersecano in uno stesso punto.

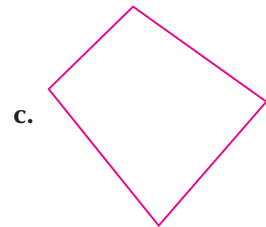
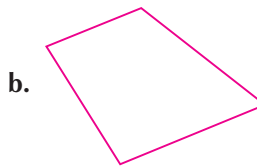
**2** Nelle seguenti figure indica con la lettera  $C$  il circocentro e con  $r$  il raggio dei poligoni inscritti; con  $I$  l'incentro e con  $a$  l'apotema del poligono circoscritto:



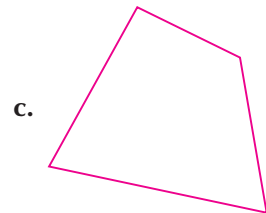
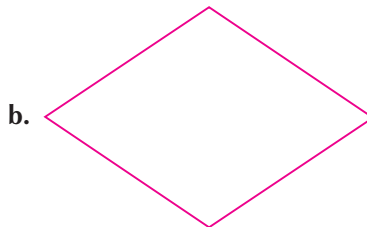
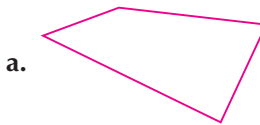
**3** Completa le seguenti proprietà:

- in un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono .....
- in un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza la somma delle misure ..... è ..... alla somma delle misure .....

**4** Dopo aver misurato gli angoli dei seguenti quadrilateri, stabilisci quali di essi si possono inscrivere in una circonferenza.



**5** Dopo aver misurato i lati dei seguenti quadrilateri, stabilisci quali di essi si possono circoscrivere ad una circonferenza.



**6** Indica quali fra i seguenti poligoni sono regolari:

- quadrato;
- rombo;
- triangolo isoscele;
- triangolo equilatero;
- rettangolo;
- trapezio rettangolo.

**7** Delle seguenti affermazioni indica quali sono vere e quali false:

- un poligono regolare è sempre inscritto in una circonferenza;
- un poligono regolare non è sempre circoscrivibile ad una circonferenza;
- il centro  $O$  di un poligono regolare è il centro sia della circonferenza circoscritta, che della circonferenza inscritta;



- d. il raggio della circonferenza circoscritta ad un poligono regolare è l'apotema del poligono;  V  F
- e. il raggio della circonferenza inscritta in un poligono regolare è l'apotema del poligono.  V  F

**8** Completa le seguenti proprietà. In un triangolo equilatero:

- a. il raggio della circonferenza circoscritta è ..... del raggio di quella .....
- b. l'apotema è ..... dell'altezza del triangolo.

## ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO BASE \*

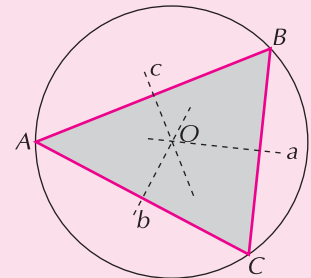
### 1 *Esercizio Svolto*

#### La costruzione geometrica per inscrivere un triangolo in una circonferenza

Inscrivi un triangolo acutangolo in una circonferenza.

#### Svolgimento

Dopo aver disegnato un triangolo acutangolo  $ABC$  traccia gli assi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dei suoi lati e chiama  $O$  il loro punto di intersezione. Quest'ultimo è il circocentro del triangolo. Punta il compasso in  $O$  e aprilo fino a far coincidere la sua punta scrivente con uno dei vertici del triangolo. Traccia infine la circonferenza.



**2** Inscrivi un triangolo ottusangolo in una circonferenza.

**3** Inscrivi un rettangolo in una circonferenza.

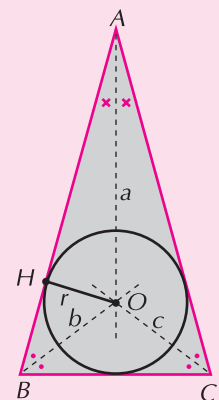
### 4 *Esercizio Svolto*

#### La costruzione geometrica per circoscrivere un triangolo ad una circonferenza

Circoscrivi un triangolo isoscele ad una circonferenza.

#### Svolgimento

Dopo aver disegnato il triangolo isoscele  $ABC$ , traccia le bisettrici  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dei suoi angoli e chiama  $O$  il loro punto di intersezione. Quest'ultimo è l'incentro del triangolo. Punta il compasso in  $O$  e aprilo fino a far coincidere la sua punta scrivente con il punto  $H$  ( $OH$  è il raggio della circonferenza inscritta). Traccia infine la circonferenza.



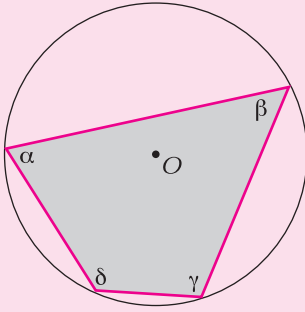
**5** Circoscrivi un rombo ad una circonferenza.

### 6 *Esercizio Svolto*

#### Gli angoli di un quadrilatero inscritto in una circonferenza

Un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha due angoli consecutivi che misurano rispettivamente  $70^\circ$  e  $125^\circ$ . Calcola l'ampiezza di ciascuno degli altri due angoli.

## Svolgimento



Dati	Incognite
$\alpha = 70^\circ$	$\beta$
$\delta = 125^\circ$	$\gamma$

Poiché il quadrilatero  $ABCD$  è inscritto nella circonferenza di centro  $O$ :

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \text{e pertanto} \quad \gamma = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ;$$

$$\beta + \delta = 180^\circ \quad \text{e pertanto} \quad \beta = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

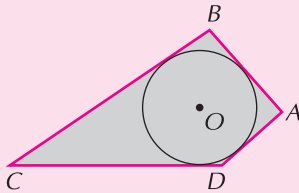
**7** Un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha due angoli consecutivi che misurano rispettivamente  $98^\circ$  e  $123^\circ$ . Calcola l'ampiezza di ciascuno degli altri due angoli.

**8** La somma e la differenza delle misure di una coppia di angoli consecutivi di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono rispettivamente  $165^\circ$  e  $23^\circ$ . Calcola l'ampiezza di ciascun angolo del quadrilatero.

**9** *Esercizio Svolto***I lati di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza**

Sia  $ABCD$  un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro  $O$  tale che le misure di due lati opposti sono rispettivamente 23 cm e 45 cm, mentre gli altri due lati opposti sono l'uno il triplo dell'altro. Calcola la misura dei lati mancanti.

## Svolgimento



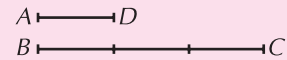
Dati	Incognite
$\overline{AB} = 23 \text{ cm}$	$\overline{AD}$
$\overline{CD} = 45 \text{ cm}$	$\overline{BC}$
$BC = 3 \cdot AD$	

Poiché il quadrilatero  $ABCD$  è circoscritto alla circonferenza di centro  $O$  sappiamo che:

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} = (23 + 45) \text{ cm} = 68 \text{ cm}$$

Rappresentiamo con i segmenti il rapporto esistente tra i lati  $AD$  e  $BC$ :

pertanto:  $\overline{AD} = (68 : 4) \text{ cm} = 17 \text{ cm}$  e  $\overline{BC} = (17 \cdot 3) \text{ cm} = 51 \text{ cm}$



**10** Sia  $ABCD$  un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro  $O$  tale che le misure di due lati opposti sono rispettivamente 46 cm e 24 cm, mentre gli altri due lati opposti differiscono di 10 cm. Calcola la misura dei lati mancanti.

**11** In un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro  $O$  un lato misura 27 cm, il suo opposto lo supera di 12 cm e gli altri due lati sono l'uno il doppio dell'altro. Calcola la misura dei lati del quadrilatero e il suo perimetro.

**12** Il perimetro di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza è 160 cm. Calcola la misura dei suoi lati sapendo che le basi differiscono di 22 cm.

**13** Il perimetro di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza è 300 cm. Calcola la misura dei suoi lati sapendo che le basi sono l'una il doppio dell'altra.

**14** Calcola la misura delle basi e il perimetro di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza sapendo che un lato obliquo misura 35 cm e che le basi differiscono di 13 cm.

- 15** Calcola la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo equilatero avente la misura dell'altezza di 27 dm.  
(Suggerimento: l'altezza del triangolo è il triplo del raggio, pertanto .....)
- 16** Calcola il perimetro di un quadrato circoscritto ad una circonferenza avente il raggio lungo 14 cm.  
(Suggerimento: il raggio della circonferenza inscritta è la metà del lato, pertanto .....)
- 17** Calcola il perimetro di un quadrato circoscritto ad una circonferenza avente il diametro lungo 33 cm.
- 18** Calcola la misura del raggio della circonferenza inscritta in un quadrato di perimetro 144 cm.
- 19** Calcola il perimetro di un esagono regolare inscritto in una circonferenza avente il raggio che misura 18 cm.  
(Suggerimento: poiché il raggio è congruente al lato dell'esagono .....)
- 20** Calcola la misura del raggio della circonferenza circoscritta ad un esagono regolare di perimetro 74,4 cm.

## ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO MEDIO \*\*

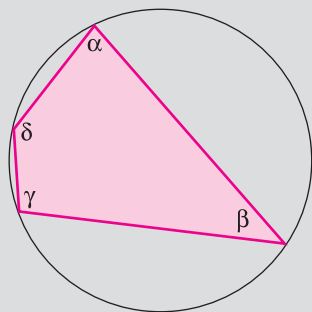
- 1** Inscrivi un triangolo rettangolo in una circonferenza. Che cosa puoi osservare?
- 2** Inscrivi un trapezio isoscele in una circonferenza.
- 3** Circoscrivi un trapezio rettangolo ad una circonferenza.

### 4 *Esercizio Guidato*

#### Gli angoli di un quadrilatero inscritto in una circonferenza

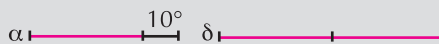
Due angoli consecutivi di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono tali che il minore dei due è ampio  $10^\circ$  in più della metà del maggiore e la loro somma è  $217^\circ$ . Calcola l'ampiezza degli angoli del quadrilatero.

#### Svolgimento



Dati	Incognite
$\alpha = \delta : 2 + \dots\dots\dots$	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$
$\alpha + \delta = \dots\dots\dots$	

Indichiamo con  $\alpha$  e  $\delta$  i due angoli noti ( $\alpha$  è il minore fra i due). Rappresentiamo con i segmenti il rapporto esistente tra gli angoli  $\alpha$  e  $\delta$ :



$$\delta = \{[(\alpha + \delta) - 10^\circ] : 3\} \cdot 2 = \dots\dots\dots = 138^\circ$$

$$\alpha = \delta : \dots\dots + \dots\dots = \dots\dots : \dots\dots + \dots\dots = 79^\circ$$

Poiché il quadrilatero  $ABCD$  è inscritto nella circonferenza di centro  $O$ :  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$ , pertanto  $\gamma = 180^\circ - \dots\dots = \dots\dots$  e  $\beta = 180^\circ - \dots\dots = \dots\dots$

- 5** Due angoli consecutivi di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono tali che il minore dei due è ampio  $15^\circ$  in meno della metà del maggiore e la loro somma è  $195^\circ$ . Calcola l'ampiezza degli angoli del quadrilatero.

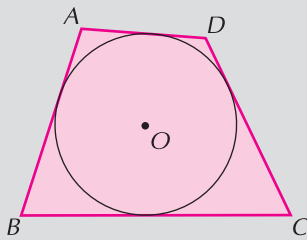
- 6 Due angoli consecutivi di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono tali che il minore dei due supera di  $17^\circ$  il doppio del maggiore e la loro somma è  $206^\circ$ . Calcola l'ampiezza degli angoli del quadrilatero.

### 7 *Esercizio Guidato*

#### I lati di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza

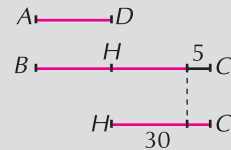
Sia  $ABCD$  un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro  $O$  con due lati opposti congruenti. Calcola la misura dei lati del quadrilatero sapendo che gli altri due lati opposti differiscono di 30 cm e che l'uno supera di 5 cm il doppio dell'altro.

#### Svolgimento



Dati	Incognite
$\overline{AB} = \dots\dots$	$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$
$\overline{BC} - \overline{AD} = \dots\dots\dots$	
$\overline{BC} = \dots\dots \cdot \overline{AD} + \dots\dots$	

Rappresentiamo con i segmenti il rapporto esistente tra i lati  $AD$  e  $BC$  :



Il segmento  $\overline{HC}$  essendo la differenza dei due lati misura  $\dots\dots\dots$

Quindi  $\overline{AD} = \overline{HC} - \dots\dots = \dots\dots\dots = 25$  cm

$$\overline{BC} = (\overline{AD} \cdot \dots\dots) + \dots\dots = \dots\dots\dots = 55$$
 cm

Poiché il quadrilatero  $ABCD$  è circoscritto alla circonferenza di centro  $O$  sappiamo che:

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} = (\dots\dots\dots) \text{ cm} = \dots\dots \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} = (\overline{AD} + \dots\dots) : 2 = \dots\dots : \dots\dots \text{ cm} = 40$$
 cm

- 8 Sia  $ABCD$  un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro  $O$  con due lati opposti l'uno il doppio dell'altro. Calcola la misura dei lati del quadrilatero sapendo che gli altri due lati differiscono di 12 cm e che il maggiore dei due è 18 cm in meno del doppio dell'altro.

- 9 Le basi di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza sono l'una il doppio dell'altra e la loro differenza è di 23 dm. Calcola le misure dei lati e il perimetro.

- 10 Il lato obliquo di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza misura 45 cm. Determina il perimetro del trapezio.

- 11 Il lato obliquo di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza misura 58 cm. Determina il perimetro e la misura delle basi sapendo che differiscono di 21 cm.

- 12 Determina la lunghezza dei lati e il perimetro di un trapezio rettangolo circoscritto ad una circonferenza avente il raggio lungo 16 cm, sapendo che la base maggiore è il doppio della minore e che differiscono di 24 cm.

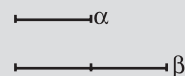
### 13 *Esercizio Guidato*

#### La relazione tra il numero dei lati di un poligono regolare e l'ampiezza dell'angolo al centro

L'angolo al centro di un poligono regolare è la metà del suo complementare. Calcola il numero dei lati del poligono regolare.

**Svolgimento**

Rappresentiamo con una figura il rapporto fra l'angolo al centro del poligono regolare ( $\alpha$ ) e il suo complementare ( $\beta$ ):



Poiché  $\alpha + \beta = 90^\circ$  si ha che  $\alpha = 90^\circ : \dots = \dots$   
quindi  $n^\circ$  lati del poligono =  $\dots : 30^\circ = \dots$

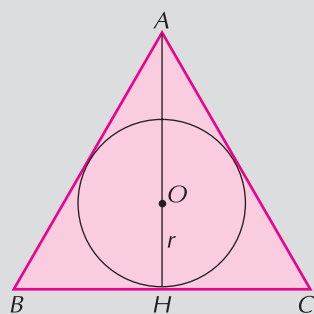
**14** L'angolo al centro di un poligono regolare è di  $10^\circ$  inferiore al suo complementare. Calcola il numero dei lati del poligono regolare.

**15** *Esercizio Guidato*

**La relazione tra apotema e altezza di un triangolo equilatero**

Calcola il perimetro di un triangolo equilatero sapendo che il raggio della circonferenza inscritta misura 44 cm e che il lato supera di 20,42 cm la misura dell'altezza.

**Svolgimento**



Dati	Incognita
$\overline{OH} = \dots\dots\dots$	$2p_{(ABC)}$
$\overline{AC} = \overline{AH} + \dots\dots\dots$	

Poiché AH (altezza) è tre volte OH (apotema):

$$\overline{AH} = \overline{OH} \cdot \dots = \dots \cdot \dots \text{ cm} = 132 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \dots\dots\dots = \dots + \dots \text{ cm} = 152,42 \text{ cm}$$

$$2p_{(ABC)} = \overline{AC} \cdot \dots = \dots \cdot \dots \text{ cm} = \dots\dots\dots \text{ cm}$$

**16** Calcola il perimetro di un triangolo equilatero sapendo che il raggio della circonferenza inscritta misura 16 cm e che il lato supera di 7,42 cm la misura dell'altezza.

**17** Calcola il perimetro di un quadrato circoscritto ad una circonferenza di raggio congruente a  $\frac{1}{3}$  del lato di un rombo di perimetro 72 cm.

**18** Calcola la misura del raggio della circonferenza inscritta in un quadrato il cui perimetro è il doppio di quello di un rettangolo avente la base e l'altezza che misurano rispettivamente 21 cm e 11 cm.

**19** Calcola il perimetro di un esagono regolare inscritto in una circonferenza il cui raggio è  $\frac{1}{5}$  del perimetro di un rombo avente il lato lungo 35 cm.  
(Suggerimento: il raggio della circonferenza circoscritta è congruente al lato dell'esagono)

**20** Calcola la misura del raggio della circonferenza circoscritta ad un esagono regolare di perimetro 21,6 cm.

**ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO AVANZATO \*\*\***

**1** Due angoli consecutivi di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono uno  $\frac{3}{4}$  dell'altro e la somma delle loro misure è  $203^\circ$ . Calcola l'ampiezza dei quattro angoli del quadrilatero.

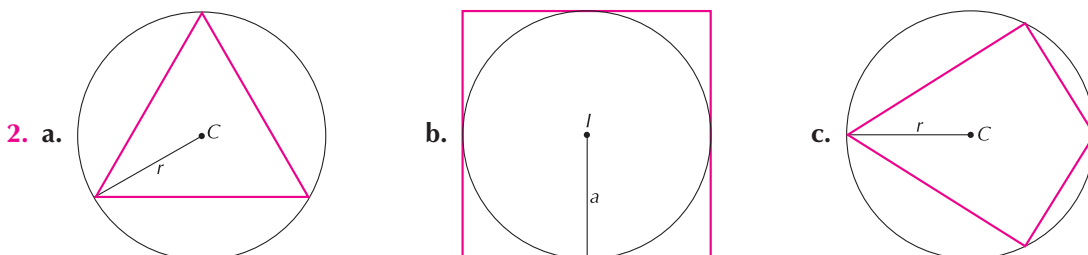
**2** Due angoli consecutivi di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono uno  $\frac{3}{7}$  dell'altro e la differenza delle loro misure è  $44^\circ$ . Calcola l'ampiezza dei quattro angoli del quadrilatero.

- 3** Due lati consecutivi di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza sono uno  $\frac{1}{5}$  dell'altro e la loro somma misura 336 cm. Determina la misura di ciascun lato sapendo che il perimetro è 624 cm.
- 4** Calcola il perimetro di un quadrato il cui lato è  $\frac{2}{5}$  del lato obliquo di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza. Si sa inoltre che le basi del trapezio sono una  $\frac{2}{3}$  dell'altra e che la loro differenza misura 14 cm.
- 5** Determina la misura dei lati di un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza sapendo che le basi sono una  $\frac{5}{4}$  dell'altra e che è isoperimetrico ad un rettangolo le cui dimensioni differiscono di 45 dm e sono una  $\frac{2}{7}$  dell'altra.
- 6** In un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza la proiezione del suo lato obliquo sulla base maggiore è  $\frac{2}{7}$  del lato obliquo stesso e la loro somma è misura 108 cm; calcola il perimetro e la misura di ciascun lato del trapezio.
- 7** Calcola il perimetro di un rombo il cui lato è  $\frac{7}{10}$  del lato obliquo di un trapezio rettangolo circoscritto ad una circonferenza avente il raggio lungo 18 cm. Si sa inoltre che le basi del trapezio differiscono di 48 cm e sono una  $\frac{1}{3}$  dell'altra.
- 8** Determina il perimetro di un trapezio rettangolo circoscritto ad una circonferenza sapendo che il suo lato obliquo misura 38 cm e che il perimetro di un esagono regolare inscritto nella stessa circonferenza è 78 cm.
- 9** Il perimetro di un poligono regolare è il doppio di quello di un rombo il cui lato misura 22 cm. Sapendo che il lato del poligono è congruente al lato di un quadrato di perimetro 44 cm, calcola l'ampiezza dell'angolo al centro del poligono regolare.
- 10** Il perimetro di un poligono regolare è il doppio di quello di un quadrato il cui lato misura 36 cm. Sapendo che il lato del poligono è congruente alla dimensione minore di un rettangolo di perimetro 108 cm, calcola l'ampiezza dell'angolo al centro del poligono regolare, sapendo che le due dimensioni del rettangolo differiscono di 6 cm.

## SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

### VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI CONOSCENZA

1. a., d.



3. a. supplementari; b. di due lati opposti; uguale; degli altri due.



