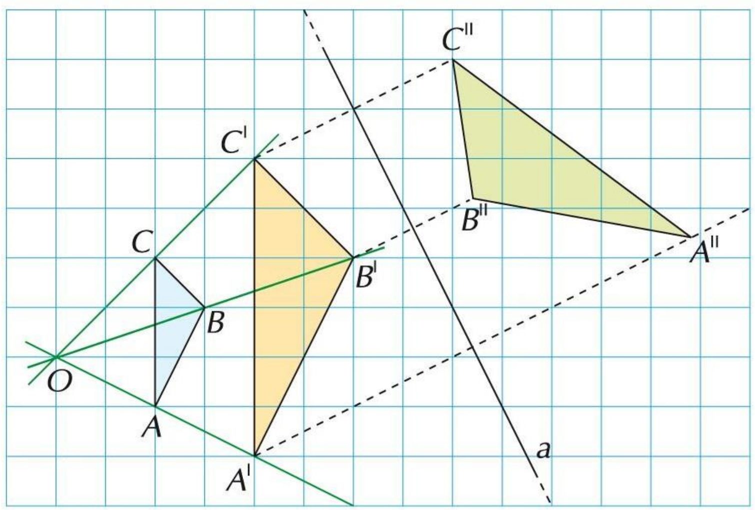
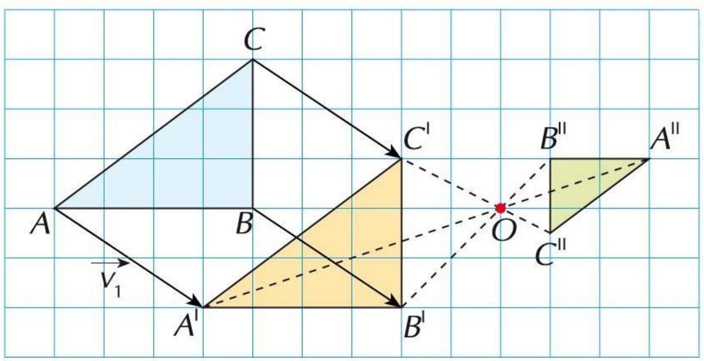
2 La similitudine

DEFINIZIONE. La **similitudine** è una trasformazione geometrica che si ottiene applicando alla stessa figura e in successione un’isometria ed un’omotetia (o viceversa). Le figure che si corrispondono in questo tipo di trasformazione si dicono **simili**.

Consideriamo le seguenti figure ottenute componendo:



- un’omotetia diretta di centro O e $k = 2$ con una simmetria assiale di asse a.



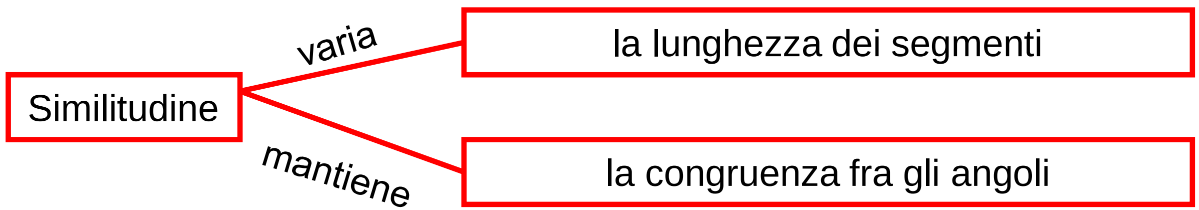
- una traslazione di vettore $\vec{v}_1$ con un’omotetia di centro O e $k = \dfrac{1}{2}$

In entrambi i casi i due triangoli *ABC* e *A”B”C”* hanno gli angoli congruenti, mentre si è modificata la lunghezza dei lati corrispondenti che tuttavia mantengono un rapporto costante.

2 La similitudine

PROPRIETÀ. La **similitudine** è una trasformazione geometrica che lascia immutate le ampiezze degli angoli, ma varia la lunghezza dei segmenti corrispondenti secondo un rapporto costante che si chiama **rapporto di similitudine** e si indica con *k*.

In sintesi:

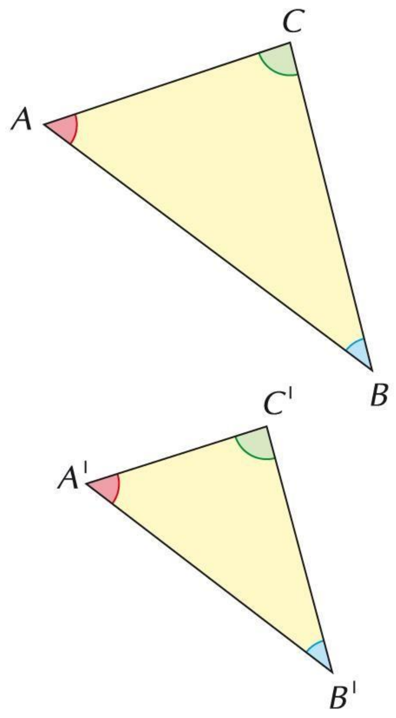


DEFINIZIONE. Due o più poligoni si dicono **simili** quando hanno gli angoli ordinatamente congruenti e le misure dei lati omologhi legate da un rapporto costante.

2 I criteri di similitudine dei triangoli

Consideriamo due triangoli *ABC* e *A'B'C'* in cui poniamo le condizioni

$$\widehat{A} = \widehat{A}';\qquad \widehat{B} = \widehat{B}';\qquad \widehat{C} = \widehat{C}'$$



Se misuriamo i lati corrispondenti e calcoliamo i loro rispettivi rapporti, troveremo che sono in proporzione ovvero che hanno lo stesso rapporto:

$$A'B' : AB = B'C' : BC = C'A' : CA = k$$

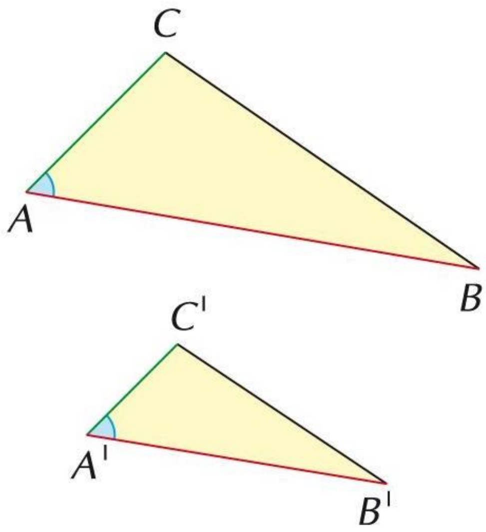
Possiamo concludere che:

1° CRITERIO DI SIMILITUDINE. Due triangoli sono simili se hanno gli angoli ordinatamente congruenti.

2 I criteri di similitudine dei triangoli

Consideriamo due triangoli *ABC* e *A'B'C'* in cui poniamo le condizioni

$$\widehat{A} = \widehat{A}' \qquad A'B' : AB = A'C' : AC = k$$



Se misuriamo con il goniometro le altre due coppie di angoli corrispondenti troveremo che:

$$\widehat{B} = \widehat{B}' \qquad \widehat{C} = \widehat{C}'$$

Calcolando il rapporto tra l'altra coppia di lati omologhi, troveremo che anche quest'ultima ha lo stesso rapporto delle prime due coppie di lati omologhi:

$$B'C' : BC = A'B' : AB = A'C' : AC = k$$

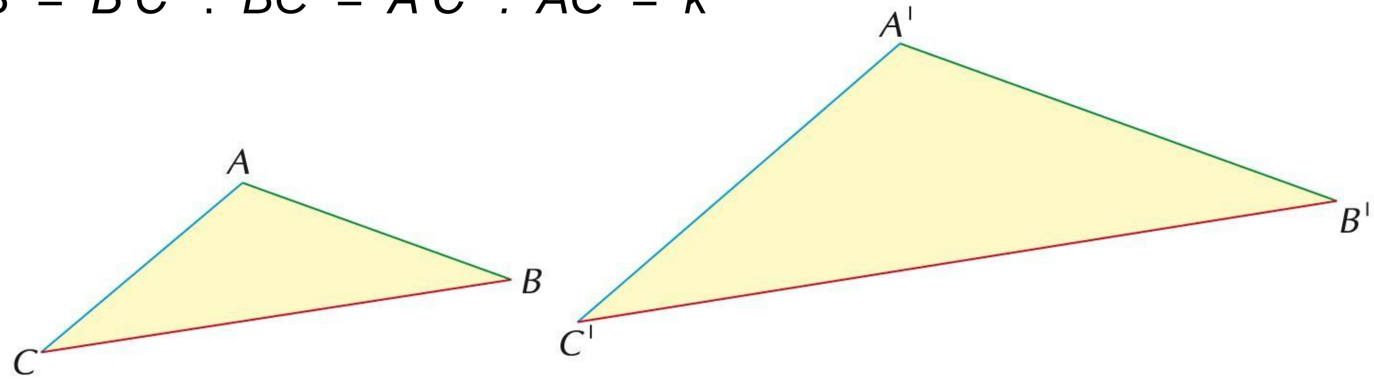
Possiamo dedurre che:

2° CRITERIO DI SIMILITUDINE. Due triangoli sono simili se hanno due lati proporzionali e l'angolo fra essi compreso congruente.

2 I criteri di similitudine dei triangoli

Consideriamo due triangoli *ABC* e *A'B'C'* in cui poniamo la condizione

$$A'B' : AB = B'C' : BC = A'C' : AC = k$$



Se misuriamo con un goniometro l'ampiezza degli angoli, vedremo che quelli corrispondenti hanno la stessa ampiezza:

$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \quad \widehat{B} = \widehat{B}'; \quad \widehat{C} = \widehat{C}'$$

Possiamo dedurre che:

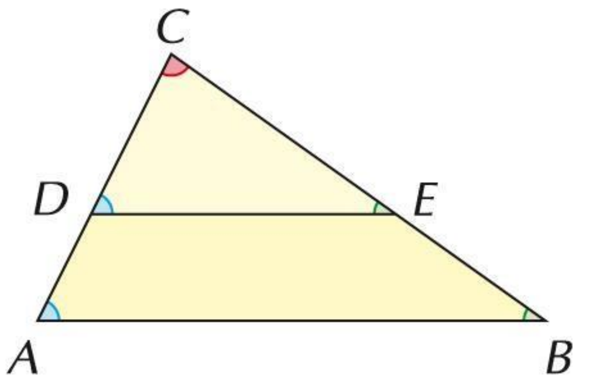
3° CRITERIO DI SIMILITUDINE. Due triangoli sono simili se hanno i lati corrispondenti in proporzione.

3 I teoremi della similitudine

Il teorema della parallela al lato di un triangolo

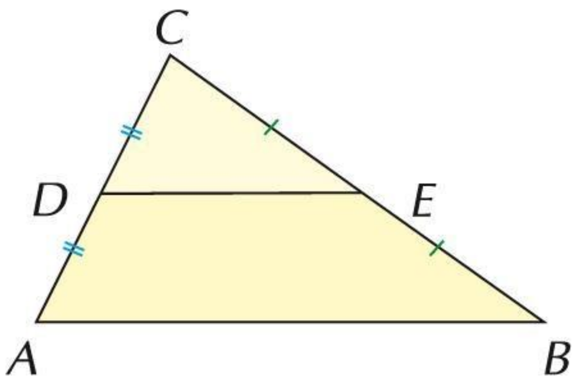
TEOREMA. In un triangolo, **una parallela ad un lato** individua un nuovo triangolo simile a quello dato e divide i lati intersecati in **segmenti direttamente proporzionali**.
In simboli:

$$AD : DC = BE : EC$$



Una conseguenza di tale teorema è che:

TEOREMA. La **parallela ad un lato** di un triangolo condotta per il punto medio di un altro lato divide il terzo lato in **due segmenti congruenti**.

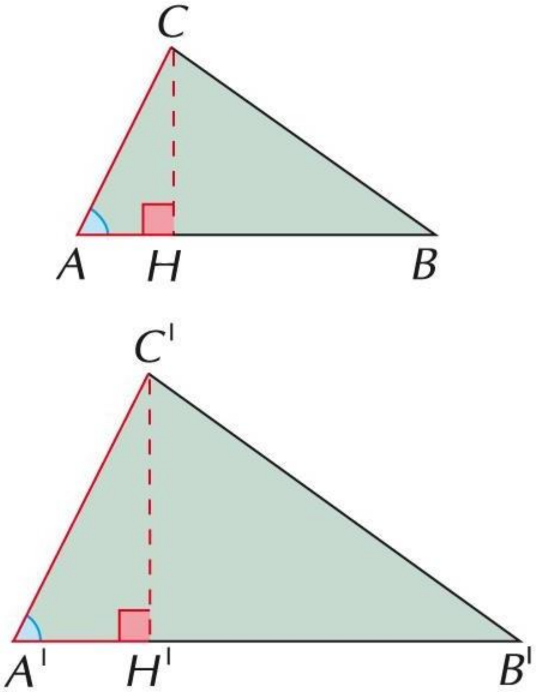


I teoremi della similitudine

Il teorema delle altezze corrispondenti di due triangoli simili

TEOREMA. In due triangoli simili le **altezze sono proporzionali alle rispettive basi**. In simboli:

$$C'H' : CH = A'B' : AB$$



3 I teoremi della similitudine

Il teorema dei perimetri di due poligoni simili

TEOREMA. Il **rapporto tra i perimetri di due triangoli simili** è uguale al rapporto tra le misure di due lati corrispondenti; in simboli:

$$2p_{(A'B'C')} : 2p_{(ABC)} = A'B' : AB = k$$

Più in generale:

TEOREMA. Il **rapporto tra i perimetri di due poligoni simili** è uguale al rapporto tra le misure di due lati corrispondenti.

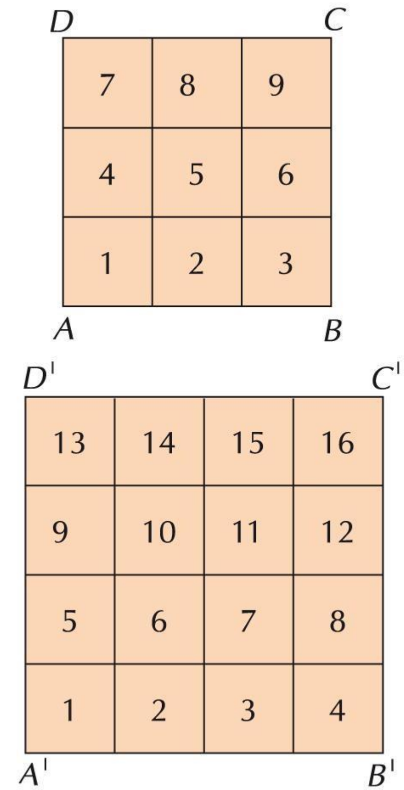
TEOREMA. Tutte le misure lineari corrispondenti di due poligoni simili stanno tra loro nello **stesso rapporto di similitudine**.

3 I teoremi della similitudine

Il teorema delle aree di due poligoni simili

TEOREMA. Il **rapporto tra le aree di due poligoni simili** è uguale al quadrato del rapporto tra due lati corrispondenti; in simboli:

$$\text{Area}' : \text{Area} = (A'B')^2 : (AB)^2 = k^2$$



Ad esempio, considerando la figura a lato,

$$A'B' : AB = \frac{4}{3}$$

$$\frac{A_{(A'B'C'D')}}{A_{(ABCD)}} = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$